

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۵۰

نام آزمون: ریاضی نهم

نام مدرسه: شاهد ۱

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۱/۰۱

متوسطه ۱



درنا مظفری

۱ کدام گزینه همواره درست است؟

- ۱ دو مثلث متساوی الساقین که یک میانه برابر دارند، هم‌نهشت هستند.
۲ دو مثلث قائم‌الزاویه که دو ضلع برابر دارند، هم‌نهشت هستند.
۳ دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت هستند.
۴ دو مثلث متساوی‌الاضلاع که یک ارتفاع برابر دارند، هم‌نهشت هستند.

۲ مجموعه A دارای n عضو است. اگر سه عضو متمایز به A اضافه شود، تعداد ۱۱۲ زیرمجموعه به تعداد زیرمجموعه‌های آن اضافه می‌شود، n کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴ ۶

۳ کدام گزینه نادرست است؟

- ۱ $Q \cup Q' = R$ ۲ $Z \cap N = N$ ۳ $Q - Z = N$ ۴ $Q \cap Q' = \{\}$

۴ اگر تاسی را دوبار پرتاب کنیم، احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده ۷ باشد، چقدر است؟

- ۱ $\frac{1}{6}$ ۲ $\frac{1}{5}$ ۳ $\frac{1}{3}$ ۴ $\frac{1}{4}$

۵ صورت کسرهای ساده نشدنی زیر عدد طبیعی است. چند تا از آنها نمایش اعشاری متناوب دارد؟

- ۱ ۲ ۲ ۵ ۳ ۴ ۴ ۳ ۵ ۲

۶ مثلثی به اضلاع $4, 5, 6$ و x با مثلثی به اضلاع $6, a$ و ۱۲ متشابه است. (اضلاع از کوچک به بزرگ مرتب‌شده) محیط مثلث بزرگ‌تر کدام است؟

- ۱ ۲۶ ۲ ۲۱ ۳ ۲۷ ۴ ۱۹٫۵

۷ اگر $5^{2x-1} = 10$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{(100)^{x+1}}{100}$ کدام است؟

- ۱ ۵ ۲ ۵۰۰ ۳ ۵۰ ۴ ۱۰۰

۸ طول اضلاع مثلثی ۱۲، ۱۷، ۲۱ سانتی‌متر است. این مثلث با مثلث دیگری که محیط آن ۲۰ سانتی‌متر می‌باشد متشابه است. طول کوچک‌ترین ضلع مثلث کوچک‌تر کدام است؟

- ۱ $2, 4$ ۲ $3, 4$ ۳ $4, 8$ ۴ $4, 2$

۹ نسبت تشابه مثلث ABC به اضلاع ۶ و a و b به مثلث DEF به اضلاع ۶ و ۱۰ و ۱۴، کوچک‌تر از یک است. بیشترین عددی که می‌توان به‌عنوان نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث DEF در نظر گرفت کدام است؟

- ۱ $2\frac{2}{3}$ ۲ $\frac{9}{15}$ ۳ $\frac{9}{49}$ ۴ $\frac{9}{25}$

۱۰ مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ چند زیرمجموعه دارد به‌طوری که شامل عضوهای a, c و e باشند ولی عضوهای b و g را نداشته باشند؟

- ۱ ۲ ۲ ۴ ۳ ۸ ۴ ۱۶

۱۱ اگر تاسی را دوبار بیندازیم، احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده مضرب ۵ باشد، کدام است؟

- ۱ $\frac{5}{26}$ ۲ $\frac{7}{36}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{1}{6}$



۱۲) در کسر کوچک‌تر از واحد $\frac{7n}{72}$ به ازای هر n این کسر متناوب است. عدد طبیعی‌ای که می‌توان به جای n قرار داد تا بسط اعشاری این کسر متناوب ساده شود، چند است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

۱۳) فرض کنیم در کشور کانادا برخی مردم فقط به زبان انگلیسی، برخی فقط به زبان فرانسه و بقیه به هر دو زبان و به زبان دیگری صحبت نمی‌کنند. یک آمارگیری نشان داده است که ۸۵٪ از مردم کانادا می‌توانند به انگلیسی و ۷۵٪ به فرانسوی صحبت کنند. چند درصد از مردم به هر دو زبان صحبت می‌کنند؟

۶۰ (۴)

۲۵ (۳)

۵۷ (۲)

۴۰ (۱)

۱۴) اگر $27^x = 243$ آنگاه x برابر با کدام گزینه است؟

$\frac{3}{5}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{5}{3}$ (۲)

۴ (۱)

۱۵) حاصل عبارت $\frac{2\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \div \frac{3}{8}}{\frac{1}{3} \div 3 \times 5 - \frac{5}{6}}$ ، برابر است با:

$-\frac{15}{48}$ (۴)

-20 (۳)

$\frac{13}{24}$ (۲)

-6 (۱)

۱۶) عبارت $\sqrt[3]{(2 - \sqrt{5})^3}$ برابر با کدام گزینه است؟

$-2 - \sqrt{5}$ (۴)

$2 - \sqrt{5}$ (۳)

$\sqrt{5} - 2$ (۲)

$|2 - \sqrt{5}|$ (۱)

۱۷) کدام عدد زیر اصم (گنگ) نیست؟

$\sqrt{36 + 25}$ (۴)

$\sqrt{\sqrt{9}}$ (۳)

$\sqrt{\sqrt{81}}$ (۲)

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}}$ (۱)

۱۸) حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{20} \times \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{30} \div \sqrt[3]{60}}$ کدام است؟

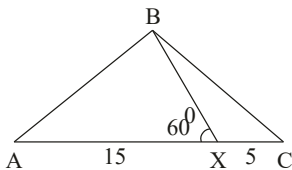
$\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{1}{10}$ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

۱۹) در مثلث ABC نقطه x را روی ضلع AC طوری اختیار کرده‌ایم که $AX = 15$ و $CX = 5$ و $\hat{AXB} = 60^\circ$ باشد. چنانچه $\hat{ABC} = 2\hat{AXB}$ باشد. اندازه ضلع BC چقدر است؟



۱۰ (۲)

۳۰ (۱)

$5\sqrt{2}$ (۴)

$4\sqrt{5}$ (۳)

۲۰) چند تا از جملات زیر همواره صحیح هستند؟

(۱) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (۲) هر عدد حقیقی، عددی گویا است.

(۳) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. (۴) بین دو کسر $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

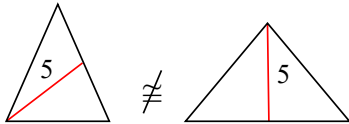
۴ (۱)

پاسخنامه تشریحی

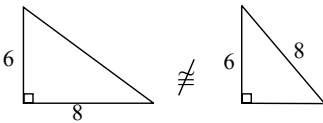
۱) چون مثلث متساوی الاضلاع، یک سه ضلعی منتظم است و تمام ارتفاع‌های آن با هم برابر هستند، در صورت داشتن یک ارتفاع برابر بین دو مثلث، هر سه ارتفاع دو مثلث با هم برابر و در نتیجه دو مثلث با هم، هم‌نهشت هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها: برای گزینه‌های ۱ تا ۳ مثال نقض می‌آوریم.

گزینه ۱: دو میانه برابر دارند اما با هم هم‌نهشت نیستند.

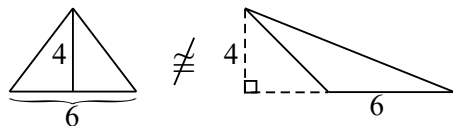


گزینه ۲: چون وتر آنها برابر نیست هم‌نهشت نیستند.



گزینه ۳: با توجه به شکل کاملاً مشخص است هم‌نهشت نیستند.

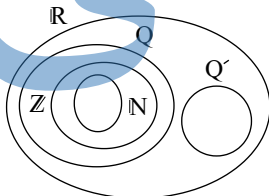
یکی مثلث متساوی الساقین و دیگری مثلث متساوی الاضلاع است.



۲) n را تعداد اعضای مجموعه A در نظر می‌گیریم؛ پس تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه A برابر 2^n می‌شود. حال اگر تعداد اعضای مجموعه A را سه واحد افزایش دهیم، تعداد اعضا برابر $(n+3)$ و تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر 2^{n+3} می‌شود و در نتیجه خواهیم داشت:

$$2^{n+3} - 2^n = 112 \Rightarrow 2^n \times 2^3 - 2^n = 112 \Rightarrow 2^n(2^3 - 1) = 112$$

$$\Rightarrow 2^n(7) = 112 \Rightarrow 2^n = \frac{112}{7} = 16 \Rightarrow 2^n = 2^4 \Rightarrow n = 4$$



۳) با توجه به نمودار ون روبه‌رو، واضح است که گزینه ۳ غلط است.

راه دوم: $Q - Z$ شامل اعداد گویا غیر صحیح است که هیچ عضو مشترک با N ندارد.

۴) اگر تاس را دوبار پرتاب کنیم، کل حالت‌ها برابر $6 \times 6 = 36$ می‌شود. حال حالت‌هایی را که مجموع دو تاس ۷ می‌شود، به دست می‌آوریم.

$$A = \left\{ \left(\begin{matrix} \text{تاس } b \\ \uparrow \\ 1, 6 \\ \downarrow \\ \text{تاس } a \end{matrix} \right), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) \right\}$$

پس تعداد حالت‌هایی که مجموع دو تاس برابر با ۷ می‌شود، برابر است با: $n(A) = 6$ حال:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

۵) مخرج کسرها ساده نشدنی را به شمارنده‌های اول آن تجزیه می‌کنیم. اگر شمارنده‌ها فقط ۲ یا فقط ۵ یا هر دوی آنها باشند، کسر اعشاری مختوم در غیر این صورت کسر اعشاری نامختوم (متناوب) دارند.

متناوب ۷ $\Rightarrow \frac{d}{210} \Rightarrow 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ ← شمارنده ۷ و ۳ دارد.

$$\text{مختوم } 400 \Rightarrow 400 = 2^4 \times 5^2$$

متناوب ۷۵۰ $\Rightarrow 750 = 2 \times 3 \times 5^3$ ← شمارنده ۳ دارد.

$$\text{مختوم } 250 \Rightarrow 250 = 2 \times 5^3$$

متناوب ۱۸۰ $\Rightarrow 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ ← شمارنده ۳ دارد.

پس سه کسر از ۵ کسر صورت سؤال دارای نمایش اعشاری متناوب هستند.



$$\frac{4,5}{6} = \frac{6}{a} \Rightarrow 4,5a = 6 \times 6 \Rightarrow 4,5a = 36 \Rightarrow a = 8$$

با توجه به صورت سؤال که اضلاع از کوچک به بزرگ مرتب شده‌اند مشخص است مثلث دوم بزرگ تر است.

$$\text{محیط مثلث بزرگ تر} = 12 + 8 + 6 = 26$$

فرض سوال را به کمک قوانین توان به صورت زیر می‌نویسیم:

$$10^{2x-1} = 5 \Rightarrow 10^{2x} \div 10 = 5 \Rightarrow 10^{2x} = 10 \times 5 \Rightarrow 10^{2x} = 50$$

حالا به سراغ صورت سوال می‌رویم:

$$\frac{(100)^{x+1}}{100} = \frac{(10^2)^{x+1}}{10^2} = \frac{10^{2x+2}}{10^2} = 10^{2x+2-2} = 10^{2x} = 50$$

$$12 + 17 + 21 = 50 \quad \text{محیط اولین مثلث را به دست آوریم:}$$

$$\frac{50}{20} = \frac{5}{2} \quad \text{نسبت تشابه برابر است با:}$$

پس نسبت اضلاع هم: $\frac{5}{2}$ با توجه به اینکه کوچک‌ترین ضلع مثلث بزرگ‌تر برابر ۱۲ است نسبت تشابه برابر است با:

$$\frac{5}{2} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 4,8$$

از آنجا که نسبت تشابه دو مثلث عدد ۱ نیست پس ضلع به واحد ۶ در مثلث ABC با ضلع ۶ واحدی مثلث دیگر متناسب نیست، پس ۶ با a متناسب است یا با b.

در دو حالت نسبت مساحت‌ها را محاسبه می‌کنیم.

* نسبت مساحت‌ها با مجذور نسبت تشابه برابر است.

$$\left. \begin{array}{l} 1) \frac{a}{6} = \frac{b}{10} = \frac{6}{14} \rightarrow \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{9}{49} \\ 2) \frac{a}{14} = \frac{b}{6} = \frac{6}{10} \rightarrow \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{9}{25} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{9}{25} > \frac{9}{49}$$

بیشترین حالتی که می‌توان در نظر گرفت.

کافی است عضوهایی که سؤال روی آنها شرط گذاشته را کنار گذاشته و تعداد زیرمجموعه‌های عضوهای باقی‌مانده را حساب کنیم:

$$2^{7-(3+2)} = 4$$

این چهار زیرمجموعه عبارتند از:

$$\{a, c, e\}, \{a, c, e, f\}, \{a, c, e, d\}, \{a, c, e, d, f\}$$

به‌ازای هر عدد برای پرتاب اول، ۶ عدد برای پرتاب دوم وجود دارد. بنابراین، تعداد کل حالت‌ها برابر $6 \times 6 = 36$ خواهد بود.

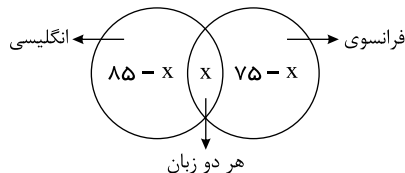
$$A = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 6), (6, 4), (5, 5)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{36}$$

با تجزیه مخرج عامل‌های اول ۲ و ۳ دیده می‌شود. برای آنکه این کسر متناوب ساده شود باید عامل 2^3 مخرج $\frac{7n}{3^3 \times 2^3}$ ساده گردد، پس $n = 2^3 = 8$.

$$12) \quad 1) \quad 2) \quad 3) \quad 4) \quad 13) \quad 1) \quad 2) \quad 3) \quad 4)$$

با توجه به اطلاعات مسئله، نمودار زیر را رسم می‌کنیم:



$$85 - x + x + 75 - x = 100 \Rightarrow 160 - x = 100 \Rightarrow x = 60\%$$

ابتدا دو طرف تساوی را به صورت عدد توان‌دار با پایه ۳ می‌نویسیم:

$$27^x = 243 \Rightarrow (3^3)^x = 3^5 \Rightarrow 3^{3x} = 3^5$$

حالا معادله توانی را حل می‌کنیم:

$$3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$1) \quad 2) \quad 3) \quad 4) \quad 15)$$

$$2\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \div \frac{3}{8} = \frac{7}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{3} \div 3 \times 5 - \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 5 - \frac{5}{6} = \frac{5}{9} - \frac{5}{6} = \frac{10 - 15}{18} = \frac{-5}{18}$$

در نتیجه حاصل کل کسر برابر است با:



$$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{-5}{18}} = \frac{-18 \times 5}{3 \times 5} = -6$$

$$\sqrt[n]{(2 - \sqrt{5})^3} = 2 - \sqrt{5} \text{ پس } \sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ اگر } n \text{ فرد باشد } \sqrt[n]{a^n} = a \text{ و اگر } n \text{ زوج باشد } \sqrt[n]{a^n} = |a|$$

نکته: اگر n فرد باشد $\sqrt[n]{a^n} = a$ و اگر n زوج باشد $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ طبق نکته بالا چون فرجه و توان زیررادیكال فرد است پس

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم

۱) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}} = \sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$ گنگ است

۲) $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$ گویا است

۳) $\sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$ گنگ است

۴) $\sqrt{\sqrt{36} + 25} = \sqrt{61}$ گنگ است

در ضرب و تقسیم دو رادیكال با فرجه برابر، اعداد زیر رادیكال با همان فرجه در یک رادیكال ضرب یا تقسیم می‌شود.

$$\frac{\sqrt[3]{20} \times \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{60}} = \frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{60}} = \sqrt[3]{\frac{500}{60}} = \sqrt[3]{\frac{25}{3}} = 10$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

$$\hat{A}BC = \hat{A}XB \Rightarrow \hat{A}BC = 120^\circ$$

$$\hat{B}XC = 180^\circ - \hat{B}XA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}XC = \hat{A}BC = 120^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \text{ مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B}XC \sim \hat{BCA}$$

چون دو مثلث BXC و BCA متشابه‌اند لذا نسبت‌های تشابه را برای آنها می‌نویسیم:

$$AC = AX + XC = 15 + 5 = 20$$

$$\Rightarrow \frac{XC}{BC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC^2 = XC \times AC \Rightarrow BC^2 = 5 \times 20$$

$$\Rightarrow BC^2 = 100 \Rightarrow \boxed{BC = 10}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

۱) $(1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) = 2 \in Q$ غلط است

۲) $Q \subset R$ غلط است هر عدد گویا، عددی حقیقی است

۳) $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \in Q$ غلط است

۴) بین هر دو عدد حقیقی بی‌شمار عدد گویا / گنگ / حقیقی وجود دارد